

12. Szczegółowy opis realizacji programu (zakres rozszerzony)

Klasa I

ALGEBRA

I. Elementy logiki matematycznej (zob. zakres podstawowy)

II. Rachunek zbiorów (zob. zakres podstawowy)

III. Rachunek algebraiczny

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZENI:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Ćwiczenia w działaniach na ułamkach	Działania łączne na ułamkach w obliczaniu wartości wyrażeń; rozwiązywanie równań o współczynnikiem ułamkowych; rozwiązywanie zadań tekstowych.	Umiejętności: – ćwiczyć sprawność rachunkową w działaniach na ułamkach (UP).	Wykonuje wiele ćwiczeń w działaniach na ułamkach; rozwiązuje zadania tekstowe.
2. Obliczenia procentowe	Obliczanie procentu danej liczby; wyznaczenie liczby, gdy dany jest jej procent; obliczanie, jakim procentem danej liczby jest inna dana liczba.	Wiedomości: – utrwała pojęcie procentu (WP). Umiejętności: – stosuje obliczenia procentowe w zadaniach z życia codziennego (oprocentowania kredytu, oszczędności, obniżki i podwyżki cen, itp.) (UP).	Przypomina pojęcie procentu; zamienia ułamki na procenty i odwrotnie; wykonuje obliczenia procentowe w zadaniach nawiązujących do życia codziennego.
3. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb rzeczywistych	Przypomnienie pojęcia potęgi o wykładniku całkowitym, a także pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej oraz własności działań na potęgach i na pierwiastkach.	Wiedomości: – definiuje potęgę liczby rzeczywistej o wykładniku naturalnym i całkowitym (WP); – definiuje pierwiastek arytmetyczny (WP). Umiejętności: – omawia własności działań na potęgach i pierwiastkach (UP).	Podaje definicję potęgi o wykładniku naturalnym i całkowitym oraz własności działań na potęgach (z dowodem niektórych z nich); podaje definicję pierwiastka i własności działań na pierwiastkach.
4. Ćwiczenia w działaniach na potęgach i pierwiastkach	Ćwiczenia i przykłady na obliczanie potęgi i pierwiastków.	Umiejętności: – podnosi do potęgi liczby rzeczywiste (UP); – wyciąga pierwiastki z liczb rzeczywistych (UP).	Przypomina: definicję potęgi o wykładniku naturalnym i całkowitym, definicję pierwiastka arytmetycznego z liczby nieujemnej, własności działań na potęgach oraz pierwiastkach, przekształcanie wyrażeń z potęgami i pierwiastkami.

<p>5. Wzory skróconego mnożenia, przekształcanie wyrażeń algebraicznych</p>	<p>Wzory skróconego mnożenia typu: $(a \pm b)^n$, dla $n = 2, 3$; $a^n - b^n$, dla $n = 2, 3$; $a^3 + b^3$ oraz przykłady ich zastosowań do uproszczonych rachunków i przekształceń wyrażeń algebraicznych.</p>	<p>Wiedomości: – omawia wzory skróconego mnożenia (WP). Umiejętności: – wyjaśnia zastosowania wzorów skróconego mnożenia (pomogą mu sprawnie wykonać obliczenia i przekształcać wyrażenia algebraiczne) (UP).</p>	<p>Przypomina wzory skróconego mnożenia: $(a \pm b)^2$ i $a^2 - b^2$, znane uczniom z lekcji matematyki w gimnazjum; rozszerza znajomość wzorów skróconego mnożenia o wzory: $(a \pm b)^3$, $a^3 \pm b^3$ (stara się stosować te wzory do takich przykładów działań na liczbach i wyrażeniach, aby poznać wzory rzeczywiste upraszczały rachunki).</p>
<p>6. Zasada indukcji matematycznej</p>	<p>Sformułowanie zasady indukcji matematycznej oraz jej ilustracja na kostkach domina; proste przykłady zastosowań.</p>	<p>Wiedomości: – wyjaśnia zasadę indukcji matematycznej (WP). Umiejętności: – stosuje zasadę indukcji matematycznej w dowodzeniu twierdzeń (UP).</p>	<p>Rozpoczyna od przykładów wymagających rozumowania indukcyjnego; formułuje zasadę indukcji matematycznej, ilustruje ją na modelu kostek domina.</p>
<p>7. Dowodzenie przez indukcję matematyczną</p>	<p>Zastosowania indukcji matematycznej do dowodzenia równości, nierówności, podzielności w zbiorze liczb naturalnych.</p>	<p>Umiejętności: – przeprowadza proste dowody indukcyjne (UP).</p>	<p>Stosuje zasadę indukcji matematycznej w wielu przykładach.</p>
<p>8. Pojęcie silni. Symbol Newtona i jego algebraiczne własności</p>	<p>Definicja silni i symbolu Newtona oraz jego podstawowe własności.</p>	<p>Umiejętności: – posługuje się pojęciem silni i symbolem Newtona (UP).</p>	<p>Wprowadza pojęcia silni i symbolu Newtona oraz wykonuje wiele ćwiczeń z nimi.</p>
<p>9. Dwumian Newtona i trójkąt Pascala</p>	<p>Podanie rozwinięcia dwumianu $(a + b)^n$ oraz rozważanie trójkąta Pascala.</p>	<p>Umiejętności: – podnosi do dowolnej potęgi sumę $a + b$ oraz posługuje się przy tym trójkątem Pascala (UP).</p>	<p>Rozwija dwumian Newtona, posługując się trójkątem Pascala oraz wykonuje z nimi wiele ćwiczeń.</p>

IV. Zbiór liczb rzeczywistych

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Liczby naturalne i całkowite	Własności zbioru liczb naturalnych i zbioru liczb całkowitych o podzielności w zbiorze liczb całkowitych.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wyjaśnia pojęcie liczby naturalnej, liczby całkowitej (WP); - podaje podstawowe wiadomości z teorii podzielności w zbiorze liczb całkowitych (WP). 	Stara się nawiązać do wiedzy, którą uczeń wyniósł z gimnazjum, a następnie rozszerza ją o nowe zagadnienia.
2. Zbiór liczb wymiernych	Pojęcie liczby wymiernej; działania na liczbach wymiernych; równość liczb wymiernych; liczby wymierne na osi liczbowej.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wskazuje liczby wymierne (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - porównuje liczby wymierne (UP); - zaznacza liczby wymierne na osi liczbowej (UP); - wykonuje działania na liczbach wymiernych (UP). 	Wybiera spośród różnych liczb te, które są wymierne; konstruuje niektóre liczby wymierne (z zastosowaniem twierdzenia Talesa) i zaznacza je na osi; ćwiczy sprawność rachunkową na liczbach wymiernych.
3. Zbiór liczb niewymiernych	Pojęcie liczby niewymiernej; wykonywanie działań na liczbach niewymiernych; konstruowanie niektórych liczb niewymiernych i zaznaczanie ich na osi liczbowej; usuwanie niewymierności z mianownika ułamka.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - określa liczbę niewymierną (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wskazuje liczbę wymierną wśród podanych liczb (UP); - wykazuje niewymierność niektórych liczb (np. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) (UP); - usuwa niewymierność z mianownika ułamka (UP); - zaznacza liczbę niewymierną na osi liczbowej (UP). 	Wybiera poprzez różne ćwiczenia liczby niewymierne spośród podanych liczb, dowodzi niewymierności $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ oraz podaje ich konstrukcję (z zastosowaniem twierdzenia Pitagorasa); usuwa niewymierność z mianowników ułamków (akcentując tutaj zastosowanie poznanych wzorów skróconego mnożenia).
4. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych	Rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych i niewymiernych.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - zamienia ułamek dziesiętny skończony lub nieskończony okresowy na ułamek zwykły (UP); - podaje przybliżone rozwinięcie dziesiętne liczb niewymiernych (UP). 	Podaje (bez dowodu) twierdzenie o rozwinięciach dziesiętnych liczb rzeczywistych; ćwiczy przedstawianie liczb wymiernej w postaci ułamków dziesiętnych; zamienia ułamki dziesiętne na ułamki zwykłe itp.

5. Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych	Porównywanie liczb rzeczywistych, własności równości i nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych.	Umiejętności: – porównuje dwie liczby rzeczywiste, liczbę wymierną z liczbą niewymierną, dwie liczby niewymierne (UP).	Podaje własności relacji równości i relacji nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych.
6. Dowodzenie nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych	Zastosowania własności relacji nierówności w zbiorze R do dowodzenia innych prostych nierówności (głównie metodą nierówności równoważnych).	Umiejętności: – udowadnia proste nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych (UP).	Dowodzi innych nierówności, nawiązując do własności relacji nierówności w zbiorze LR .
7. Średnie: arytmetyczna, geometryczna, harmoniczna i kwadratowa	Pojęcie średnich liczb oraz zależności między nimi.	Umiejętności: – oblicza średnią; arytmetyczną, geometryczną, harmoniczną i kwadratową dwóch, trzech, n liczb (UP); – omawia zależności między średnimi (UP).	Wprowadza pojęcie średnich n liczb oraz dowodzi zależności między nimi dla $n = 2$ (np. metodą nierówności równoważnych); podaje informacyjnie zależności między nimi dla dowolnego n .
8. Wartość bezwzględna (moduł) liczby rzeczywistej	Definicja wartości bezwzględnej, wnioski wynikające z definicji; podstawowe własności wartości bezwzględnej i jej interpretacja geometryczna; proste równania i nierówności z wartością bezwzględną.	Wiedomości: – posługuje się wartością bezwzględną (WP). Umiejętności: – omawia własności wartości bezwzględnej i interpretację geometryczną (UP); – stosuje wartość bezwzględną do rozwiązywania równań typu $ ax + b = c$ i nierówności typu $ ax + b < (\leq) c$, $ ax + b > (\geq) c$ (UP). – rozwiązuje równania i nierówności z kilkoma wartościami bezwzględnymi (UPP).	Podaje definicję wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej; wyznacza wartość bezwzględną danych liczb; interpretuje wartość bezwzględną na osi liczbowej oraz rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną.
9. Oś liczbową, przedziały liczbowe i działania na nich	Przypomnienie wiadomości o osi liczbowej (znanych uczniom z gimnazjum); określenie przedziałów liczbowych ograniczonych i nieograczonych; działania na przedziałach.	Umiejętności: – posługuje się osią liczbową (UP); – zaznacza na osi liczbowej liczby i przedziały liczbowe oraz wyniki działań mnożących (UP).	Posługuje się osią liczbową; podaje opis przedziałów i wykonuje na nich działania: koniunkcji, alternatywy, różnicy i uzupełnienie do całej osi (jako przedzieleni) – nawiązuje przy tym do wiedzy ucznia z zakresu matematyki w gimnazjum.
10. Błąd przybliżenia, szacowanie wartości liczbowych	Pojęcie: błąd przybliżenia liczb, błąd bezwzględny i względny; reguła zaokrąglania przybliżeń.	Umiejętności: – przeprowadza obliczenia, posługując się przybliżeniami liczb (zarówno wymiernych, jak i niewymiernych (UP).	Podaje definicję błędu przybliżenia, błędu bezwzględnego i błędu względnego; omawia reguły zaokrąglania, szacuje wartości liczbowe.

V. Funkcje

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Pojęcie funkcji, funkcja liczbowa i jej wykres	Definicja funkcji jako odwzorowania zbioru w zbiór; argument funkcji; dziedzina funkcji; wartość funkcji w punkcie; wykres funkcji jako zbiór par.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - utrwała pojęcie funkcji (WP); - podaje podstawowe terminy związane z funkcją (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wskazuje, które z odwzorowań zbioru w zbiór jest funkcją, a które nie (UP); 	Akcentuje, które odwzorowanie zbioru w zbiór jest funkcją; używa kwantyfikatorów do zdefiniowania funkcji; rozpatruje różne przykłady funkcji, w tym funkcji liczbowych; uczy ucznia języka związanego z pojęciem funkcji.
2. Sposoby określania funkcji i ich zastosowanie do opisu zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym	Podanie różnych sposobów określania funkcji: opis słowny, graf, tabelka, wzór jawny, wykres.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - omawia różne sposoby określania funkcji (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - opisuje za pomocą funkcji zależności występujące w różnych dziedzinach życia (UP). 	Określa funkcje różnymi sposobami oraz opisuje nimi różne zależności w przyrodzie, gospodarce i życiu codziennym.
3. Dziedzina funkcji, zbiór wartości	Wyznaczanie dziedziny i zbioru wartości podanych przykładów funkcji, w tym przede wszystkim funkcji liczbowych.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - podaje dziedziny i zbiór wartości mającą określoną na różny sposób (WP). 	Wyznacza dziedzinę i zbiór wartości funkcji (dobiera takie przykłady funkcji liczbowych, aby mieć okazję wykorzystać zdobyte wcześniej wiadomości, np. o wartości bezwzględnej, o pierwiastkach); akcentuje przy tym, że wyznaczenie dziedziny funkcji liczbowych określonych wzorem wiąże się z wykonalnością działań w zbiorze liczb rzeczywistych.
4. Miejsce zerowe funkcji, wartość funkcji w danym punkcie, punkt stały	Znajdowanie miejsc zerowych, punktów stałych funkcji określonych na różne sposoby.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wyznacza ważne dla funkcji punkty (UP); - oblicza wartość funkcji w danym punkcie (UP); - wyznacza liczbę, dla której funkcja przyjmuje określoną wartość (UP). 	Wyznacza miejsca zerowe funkcji oraz jej wartość w punktach (ćwiczy przy tym sprawność rachunkową uczniów w działaniach na liczbach rzeczywistych).

5. Wartość najmniejsza i największa funkcji w przedziale	Określanie największej i najmniejszej wartości funkcji, wyznaczenie ich (o ile istnieją) dla funkcji określonych w danym przedziale, postępując się jej wzorem lub wykresem.	Umiejętności: – podaje wartość najmniejszą i największą funkcji określonej w przedziale, na przykład postępując się wykresem albo wzorem funkcji (stosując własności nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych) (UP)*.	Akcentuje, że funkcja w danym przedziale może mieć obie te wartości, jedną z nich albo nie osiągać żadnej.
6. Ogólne własności funkcji liczbowych	Różnowartościowość, monotoniczność, okresowość, parzystość i nieparzystość funkcji liczbowych.	Umiejętności: – określa, czy dana funkcja (określona graficznie albo wzorem jawnym) odpowiada wymienionym własnościom (UP)*.	Podaje definicje różnowartości, monotoniczności, okresowości, parzystości i nieparzystości, a następnie rozważa przykłady funkcji mających te własności.
7. Składanie funkcji	Określenie złożenia funkcji (superpozycji) oraz własności tego działania; przykłady funkcji i ich superpozycji.	Umiejętności: – składa funkcję (jest świadomy, że działanie to jest łączne, ale nie przemienne) (UP)*.	Wprowadza działanie składania funkcji, bada własności tego działania oraz składa funkcje.
8. Funkcje odwrotne	Odwracanie funkcji; przykłady funkcji i funkcji doń odwrotnych; wykres funkcji a wykres funkcji doń odwrotnej.	Umiejętności: – odwraca funkcje (UP); – sporządza wykresy odwrotnych funkcji (proste przykłady) (UP).	Bada, kiedy w ogóle funkcję można odwrócić, następnie podaje przykłady takich funkcji i je odwraca; podkreśla związek wykresu funkcji z wykresem funkcji doń odwrotnej.
9. Przekształcenia wykresu funkcji	Przesunięcie równoległe; symetria względem osi układu współrzędnych; symetria względem środka tego układu; przekształcanie wykresu funkcji przez zmianę skali.	Wiadomości: – przekształca wykres danej funkcji (WP). Umiejętności: – stosuje przekształcenia (UP); – sporządza wykresy funkcji, mając wykres funkcji $y = f(x)$; $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$, $y = f(x)$, $y = f(x) $ (UP), $y = f(x) $, $y = f(kx)$, $y = kf(x)$ (UPP).	Wykonuje dużo ćwiczeń prowadzących do przekształcenia wykresu funkcji oraz stosuje przekształcenia do sporządzania wykresów różnych funkcji.
10. Sporządzanie wykresów funkcji, odczytywanie własności funkcji z wykresu	Sporządzanie wykresu rozmaitych funkcji elementarnych określonych wzorem; odczytywanie z wykresu danej funkcji, jak najwięcej istotnych własności tej funkcji.	Umiejętności: – sporządza wykresy funkcji (UP); – odczytuje z wykresów własności tych funkcji (UP).	Akcentuje własność wykresu funkcji parzystej, nieparzystej, okresowej.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

VI. Funkcja liniowa

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Własności funkcji liniowej i jej wykres	Definicja funkcji liniowej; dziedzińska i zbiór wartości, monotoniczność, miejsc zerowe i wykres funkcji liniowej.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - podaje definicję funkcji liniowej (WP); - podaje przykład funkcji liniowej rosnącej, malejącej i stałej (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozpoznaje ją na podstawie wzoru (UP); - sporządza wykres funkcji liniowej, podaje miejsce zerowe, określa monotoniczność (UP); - zapisuje wzór funkcji liniowej na podstawie określonych danych (UP). 	Nawiązuje do wiedzy ucznia o funkcji liniowej z lekcji matematyki w gimnazjum; akcentuje związek monotoniczności funkcji z jej współczynnikiem kierunkowym; stosuje różnorodne ćwiczenia utrwalające wiedzę o funkcji liniowej.
2. Równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą	Pojęcie równania liniowego i nierówności liniowej z jedną niewiadomą; równania równoważne, nierówności równoważne.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - podaje przykłady równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozwiązuje równania i nierówności liniowe z jedną niewiadomą (UP). 	Podaje definicję równania liniowego z jedną niewiadomą i nierówności liniowej z jedną niewiadomą; rozwiązuje równania i nierówności liniowe metodą równań i nierówności równoważnych.
3. Zadania prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą	Zadania tekstowe rozwiązywane za pomocą równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - układa równanie lub nierówność liniową na podstawie analizy tekstu zadania i rozwiązuje je (UP)*. 	Rozwiązuje zadania z różnych dziedzin prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą.
4. Równania liniowe i nierówności liniowa z dwiema niewiadomymi	Pojęcie równania liniowego z dwiema niewiadomymi i jego wykres; pojęcie nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi i jej interpretacja geometryczna.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozpoznaje równanie i nierówność liniową z dwiema niewiadomymi (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - interpretuje geometrycznie równania i nierówności z dwiema niewiadomymi (UP). 	Sporządza wykresy równań liniowych z dwiema niewiadomymi oraz podaje ilustracje geometryczne nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.
5. Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi	Metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi: podstawiania, przeciwnych współczynników, wyznacznikowa, graficzna;	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozwiązuje układy każdą z czterech metod (UP); 	Prezentuje wszystkie cztery metody rozwiązywania układu dwóch równań liniowych z niewiadomymi; interpretuje graficznie układ: niezależny, zależny

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

	układ równań: zależny, niezależny, sprzeczny i jego interpretacja geometryczna.	– rozpoznaje układ zależny, niezależny, sprzeczny (UP).	i sprzeczny; przeprowadza dyskusję, rozważając układy równań z parametrem.
6. Zadania prowadzące do układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi	Zadania tekstowe z różnych dziedzin prowadzące do układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi.	Umiejętności: – rozwiązuje zadania tekstowe z różnych dziedzin, układając do nich układy równań liniowych z dwiema niewiadomymi (UP)*.	Rozwiązuje jak największą liczbę zadań tekstowych.
7. Układ nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi	Geometryczna ilustracja układu dwóch i więcej nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.	Umiejętności: – przedstawia ilustrację geometryczną układu nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi (UP)*.	Analizuje jak największą liczbę układów nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi.

GEOMETRIA

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZENI:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Odległość dwóch punktów	Odległość dwóch punktów jako długość odcinka; wzór analityczny na odległość dwóch punktów; warunek współliniowości trzech punktów i niewspółliniowości trzech punktów.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – określa odległość dwóch punktów na prostej (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – oblicza odległość dwóch punktów ze wzoru analitycznego (UP); – sprawdza współliniowość i niewspółliniowość trzech punktów (UP). 	<p>Omawia pojęcie odległości w zbiorze, następnie odległość dwóch punktów; wprowadza wzór analityczny na odległość pary punktów (w metryce pitagorejskiej); omawia warunki współliniowości i niewspółliniowości trzech punktów.</p>
2. Odległość punktu od prostej	Określenie odległości punktu od zbioru (intuicyjnie); pojęcie odległości punktu od prostej.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – określa odległość punktu od prostej (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – oblicza odległość punktu od prostej na płaszczyźnie kartezjańskiej (UP). 	<p>Określa odległość punktu od zbioru, od prostej; rozwiązuje zadania z odległością punktu od prostej.</p>
3. Okrąg i koło	Definicja okręgu i koła; pojęcia związane z okręgiem i kołem (promień, średnica, cięciwa, nierówność koła).	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – definiuje koło i okrąg, mając nierówność okręgu (koła) (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wyznacza środek okręgu (koła) i promień (UP). 	<p>Definiuje okrąg i koło; wyprowadza nierówność okręgu (koła) w postaci kanonicznej, z której łatwo odczytać współrzędne środka i promień.</p>

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

4. Wzajemne położenie okręgu i prostej	Warunki konieczne i wystarczające na każde z trzech położen wzajemnych okręgu i prostej; twierdzenie o stycznej do okręgu i promieniu poprowadzonym do punktu styczności.	Umiejętności: – rozstrzyga, kiedy okrąg i prosta mają dwa punkty wspólne, jeden punkt wspólny lub są rozłączne (w tym korzystając ze wzorów analitycznych) (UP).	Bada wzajemne położenie okręgu i prostej oraz określa warunki konieczne i wystarczające – szczególnie dużo miejsca poświęca na styczną do okręgu.
5. Wzajemne położenie dwóch okręgów	Warunki konieczne i wystarczające na każde z położen względem siebie dwóch okręgów.	Umiejętności: – rozstrzyga, kiedy dwa okręgi są do siebie styczne, kiedy się przecinają, a kiedy są rozłączne (UP).	Bada wzajemne położenie dwóch okręgów oraz określa warunki konieczne i wystarczające – korzysta także ze wzorów analitycznych.
6. Brzeg, wnętrze i zewnętrzne figury. Figury ograniczone i nieograniczone.	Pojęcie punktu wewnętrznego, brzegowego i zewnętrznego figury oraz brzeg, wnętrze i zewnętrzne figury; figury ograniczone i nieograniczone.	Wiadomości: – wskazuje punkt brzegowy, wewnętrzny i zewnętrzny figury (WP). Umiejętności: – podaje przykład figury ograniczonej i figury nieograniczonej (UP).	Odwoluje się do przykładów, wprowadzając te pojęcia.
7. Wypukłość i wklęsłość figury	Definicja figury wypukłej; przykłady figur wypukłych i niewypukłych (wklęsłych); działania mnogościowe na figurach wypukłych.	Wiadomości: – podaje przykład figury wypukłej i niewypukłej (WP). Umiejętności: – określa, jakie działania mnogościowe są wykonalne w zbiorze figur wypukłych (UP).	Wprowadzając to pojęcie, ilustruje je przykładami (wskazany byłby dowód, że koło jest figurą wypukłą); omawia działania na figurach wypukłych.
8. Kąty w kole	Kąty wpisane w koło i kąty środkowe w kole oraz zależność między nimi.	Wiadomości: – omawia twierdzenia o kątach wpisanych w koło i kątach środkowych (WP).	Dowodzi zależności między kątem środkowym i kątem wpisanym opartym na tym samym łuku okręgu oraz wyciąga wnioski z otrzymanej zależności (inne twierdzenia o kątach o kole).
9. Trójkąt i jego punkty szczególne	Twierdzenie o przecinaniu się w każdym trójkącie: dwusiecznych kątów, symetrycznych boków, wysokości.	Wiadomości: – zna (WP) i wykazuje twierdzenie o istnieniu wymienionych punktów szczególnych trójkąta metodą miejsc geometrycznych (WPP). Umiejętności: – wpisuje w trójkąt okrąg, opisuje na trójkącie okrąg (UP).	Charakteryzuje jako miejsca geometryczne punktów dwusieczną kąta, symetryczną odcinka, a następnie przy użyciu tej metody dowodzi twierdzenia o przecinaniu się dwusiecznych kątów, symetrycznych boków trójkąta itp.

10. Twierdzenie Talesa i doń odwrotne	Sformułowanie twierdzenia Talesa i twierdzenia doń odwrotnego oraz doświadczenia (z zastosowaniem wzoru na pole trójkąta); wnioski z twierdzenia Talesa (równoważne proporcje).	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> formuluje twierdzenie Talesa i doń odwrotne (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> zapisuje różne równoważne proporcje (UP). 	Zaczyna od najprostszej konfiguracji: ramiona kąta przecięte dwiema równoległymi, następnie rozważa dwie proste przecinające się i równoległe przecinające je po jednej stronie punktu przecięcia się tych dwóch prostych oraz po różnych stronach punktu przecięcia się tych dwóch prostych; zapisuje różne proporcje odcinków.
11. Zastosowania twierdzenia Talesa	Zadania rachunkowe (np. związane z cieniem drzewa) oraz ich zastosowanie w geometrii (twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie, twierdzenie o środkowych).	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> stosuje twierdzenie Talesa przede wszystkim do zadań z życia codziennego, zadań z trójkątami (UP). 	Rozwiązuje możliwości jak najwięcej zadań nie tylko rachunkowych, ale też na dowodzenie i konstrukcyjnych.
12. Czworokąt wpisany w okrąg	Twierdzenie o czworokacie wpisanym w okrąg i doń odwrotne (równość sum przeciwległych kątów czworokąta).	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> omawia charakterystykę wpisywalności czworokąta w okrąg (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozstrzyga, czy dany czworokąt można wpisać w dany okrąg czy nie (UP). 	Pyta, czy każdy trójkąt można wpisać w okrąg; następnie przechodzi do omawiania czworokątów i stawia to samo pytanie; formułuje warunek konieczny i wystarczający – warto też nie rezygnować z dowodzenia tego twierdzenia.
13. Czworokąt opisany na okręgu	Twierdzenie o czworokacie, w który można wpisać okrąg (równość sum długości przeciwległych boków).	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> omawia charakterystykę wpisywalności okręgu w czworokąt (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> sprawdza, czy w dany czworokąt można wpisać okrąg (UP). 	Zaczyna od pytania, czy w każdy trójkąt można wpisać okrąg; następnie bada, w który czworokąt można wpisać okrąg; formułuje twierdzenie i twierdzenie doń odwrotne oraz przeprowadza dowód.
14. Rodzaje czworokątów	Klasyfikacja czworokątów i charakterystyki niektórych z nich (równoległoboki, trapezy równoramienne).	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> omawia własności czworokątów (WP). 	Dokonyje klasyfikacji czworokątów i podaje charakterystykę niektórych z nich, na przykład trapezów równoramiennych, równoległoboków (warto podjąć próby ich dowodów).

FUNKCJE TRYGNOMETRYCZNE (zob. zakres podstawowy)

I. Trójmian kwadratowy (zob. zakres podstawowy)

II. Wielomiany

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Wielomian jednej zmiennej	Pojęcie wielomianu jednej zmiennej i jego stopnia; równość dwóch wielomianów.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznaje wielomian jednej zmiennej (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – określa stopień wielomianu (UP); – porównuje dwa wielomiany (UP). 	Wprowadza pojęcie wielomianu jednej zmiennej, jego stopnia; podaje dużo przykładów; formułuje twierdzenie o równości dwóch wielomianów oraz rozwiązuje związane z tym zadania.
2. Działania na wielomianach	Określanie sumy, różnicy i iloczynu dwóch wielomianów oraz ustalanie zależności stopnia sumy, różnicy i iloczynu dwóch wielomianów od stopni tych wielomianów.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wykonuje działania na wielomianach (UP); – ustala zależność stopnia sumy i różnicy wielomianów od stopni składników, a iloczynu – od stopni czynników (UP). 	Nawiązuje do wiedzy ucznia z gimnazjum, określając działania na wielomianach; wykonuje dużo ćwiczeń w działaniach na wielomianach.
3. Dzielenie wielomianów	Twierdzenie o dzieleniu z resztą, podzielność wielomianu przez wielomian.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wykonuje dzielenie wielomianu przez wielomian (UP); – ustala podzielność wielomianu przez wielomian (UP). 	Przypomina twierdzenia o dzieleniu z resztą liczb całkowitych, a następnie, analogicznie do tego, formułuje twierdzenie o dzieleniu wielomianów; wykonuje jak najwięcej ćwiczeń w tym zakresie.
4. Twierdzenie Bézouta i schemat Hornera	Twierdzenie o reszcie i ilorazie z dzielenia wielomianu przez dwumian $x - c$ oraz wniosek z tego twierdzenia.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – stosuje twierdzenie Bézouta i schemat Hornera do ustalania, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu (UP); – ustala podzielność wielomianu przez dwumian $x - c$ (UP)*. 	Nawiązuje do twierdzenia o dzieleniu z resztą i na podstawie twierdzenia o równości dwóch wielomianów otrzymuje tak zwany schemat Hornera oraz twierdzenie Bézouta; wykonuje dużo ćwiczeń związanych z tymi pojęciami.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

5. Pierwiastek wielomianu i jego krotność	Pierwiastek wielomianu; twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu; pierwiastek wielokrotny.	Umiejętności: – sprawdza, czy dana liczba jest pierwiastkiem wielomianu (UP); – określa krotność pierwiastka (UP).	Wprowadza pojęcie pierwiastka wielokrotnego wielomianu; formułuje twierdzenie o liczbie pierwiastków wielomianu; podaje przykłady wielomianów i ich pierwiastków.
6. Wzory Viète'a	Wzory Viète'a dla wielomianów stopnia trzeciego i czwartego.	Umiejętności: – stosuje poznane twierdzenie Viète'a do zadań z teorii podzielności wielomianów (UPP).	Podaje twierdzenie Viète'a dla wielomianów stopnia trzeciego i czwartego (warto namówić uczniów do podjęcia próby sformułowania go dla wielomianu stopnia n -tego); rozwiązuje wiele zadań z teorii podzielności z zastosowaniem tego twierdzenia.
7. Wymierne pierwiastki wielomianu o współczynnikach całkowitych	Twierdzenie o wymiernym pierwiastku wielomianu o współczynnikach całkowitych i jego zastosowaniu.	Umiejętności: – stosuje twierdzenie do znajdowania pierwiastków wielomianów (UP).	Formułuje twierdzenie i dowodzi go oraz wyciąga wnioski, a następnie znajduje zastosowania tego twierdzenia pierwiastki wielomianów.
8. Rozkład wielomianów na czynniki	Elementarne metody rozkładu wielomianu na czynniki: wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias, grupowanie wyrazów, wzory skróconego mnożenia.	Umiejętności: – rozkłada wielomiany na czynniki, stosując elementarne metody (UP).	Rozkłada wielomiany na czynniki, prezentując na przykładach każdą z metod rozkładu.
9. Równania wielomianowe	Pojęcie równania wielomianowego; rozwiązywanie równań wielomianowych.	Umiejętności: – rozwiązuje proste równania wielomianowe (UP).	Przystępuje do jak największej liczby ćwiczeń w rozwiązywaniu równań po wprowadzeniu pojęcia równania wielomianowego.
10. Nierówności wielomianowe	Pojęcie nierówności wielomianowej; metoda „siatki” znaków oraz szkicowanie wykresu.	Umiejętności: – posługuje się obiema metodami w rozwiązywaniu nierówności wielomianowych (UP).	Omawia obie metody rozwiązywania nierówności wielomianowych, a następnie ćwiczy je na wielu przykładach.

III. Funkcja wymierna

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Funkcje wymierne i działania na nich	Definicja funkcji wymiernej; dziedzina i działania na funkcjach wymiernych.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozpoznaje funkcję wymierną (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - wyznacza dziedzinę funkcji wymiernej (UP); - wykonuje działania arytmetyczne na funkcjach wymiernych, określając warunki wykonywalności tych działań (UP). 	Wprowadza pojęcie funkcji wymiernej; wyznacza jej dziedzinę; określa równość dwóch funkcji wymiernych oraz działania arytmetyczne na nich (nawiązuje przy tym do działań na liczbach wymiernych i ukazuje analogie).
2. Przekształcanie wyrażeń wymiernych	Działania łączne na funkcjach wymiernych.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli wyrażenia wymierne, przyjmując stosowne założenia (UP). 	Wykonuje jak najwięcej ćwiczeń w działaniach na funkcjach wymiernych.
3. Funkcja homograficzna	Definicja funkcji homograficznej; dziedzina tej funkcji; wykres i własności (miejsce zerowe i znak funkcji homograficznej).	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - sporządza wykresy funkcji homograficznych i odczytuje z nich własności funkcji (UP). 	Sporządza wykresy funkcji homograficznych, wykorzystując przesunięcie równoległe płaszczyzny.
4. Równania i nierówności wymierne	Pojęcie równania wymiernego i nierówności wymiernej; równania i nierówności wymierne z funkcją homograficzną; inne równania i nierówności wymierne.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozwiązuje równanie wymierne i nierówność wymierną (UP); - omawia rozwiązywalność równania z parametrem (UPP). 	Po wprowadzeniu pojęć równania wymiernego i nierówności wymiernej rozwiązuje jak najwięcej przykładów równań i nierówności, w tym również równań z parametrem.
5. Równania wymierne z parametrem	Dyskusja rozwiązań równań wymiernych z parametrem.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - omawia rozwiązywalność równań wymiernych z parametrem (UPP). 	Rozwiązuje równania wymierne z parametrem i przeprowadza dyskusję rozwiązań.
6. Zadania prowadzące do równań wymiernych	Zadania tekstowe z różnych dziedzin prowadzące do równań wymiernych.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> - rozwiązuje zadania tekstowe prowadzące do prostych równań wymiernych (UP). 	Rozwiązuje różne zadania prowadzące do równań wymiernych.

IV. Ciągi liczbowe (zob. zakres podstawowy)

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZENI:	Procedury osiągnięcia celów NAUCZYCIEL:
8. Wprowadzenie do pojęcia granicy ciągu nieskończonego	Definicja otoczenia punktu i przykłady; wprowadzenie zwrotu: „prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego” i przykłady na to.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> określa otoczenie danego punktu (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozstrzyga, czy prawie wszystkie wyrazy ciągu nieskończonego mają określoną własność (UP). 	Ćwiczy wprowadzone pojęcia na wielu przykładach (warto, żeby uczeń znał zależność między pojęciami: „prawie wszystkie wyrazy...” a „nieskończenie wiele wyrazów...”).
9. Pojęcie granicy ciągu nieskończonego	Wprowadzenie definicji granicy ciągu nieskończonego; sprawdzanie na przykładach, czy dana liczba jest granicą ciągu nieskończonego.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozstrzyga, czy dana liczba jest granicą danego ciągu nieskończonego (UP). 	Definiuje granicę ciągu nieskończonego, interpretuje geometrycznie oraz ćwiczy sprawdzanie (z definicji), czy dana liczba jest granicą danego ciągu nieskończonego.
10. Działania arytmetyczne na ciągach zbieżnych	Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na ciągach zbieżnych; zastosowanie tego twierdzenia do przykładów.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> stosuje twierdzenie do wyznaczania granic ciągów (UP). 	Formuluje twierdzenie oraz dowodzi dla sumy ciągów zbieżnych i ich różnicy; podaje też proste przykłady z zastosowaniem tego twierdzenia.
11. Obliczanie niektórych granic	Wyznaczanie granic ciągów będących wielomianami i funkcjami wymiernymi zmiennej naturalnej oraz ciągów, w których wzorach występują pierwiastki.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> wyznacza granice ciągów jako funkcji wymiernej i wielomianów zmiennej naturalnej (UP) oraz takich ciągów, w których wzorach występują pierwiastki (UPP). 	Wykonuje ćwiczenia w wyznaczaniu granic ciągów zbieżnych.
12. Ciągi rozbieżne do nieskończoności	Ciągi rozbieżne do plus nieskończoności i ciągi rozbieżne do minus nieskończoności; wykonalność działań arytmetycznych na nieskończonościach.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozstrzyga rozbieżność prostych przykładów ciągów (UP). 	Wprowadza definicje ciągów rozbieżnych do nieskończoności, interpretuje je geometrycznie oraz rozpatruje wiele przykładów.
13. Pojęcie szeregu liczbowego. Szereg geometryczny i jego zbieżność	Definicja szeregu liczbowego; przykłady szeregów; szereg geometryczny oraz kryterium zbieżności tego szeregu; wzór na sumę zbieżnego szeregu geometrycznego.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozpoznaje szereg geometryczny (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozstrzyga zbieżność szeregu geometrycznego (UP); oblicza sumę szeregu geometrycznego (UP). 	Wprowadza pojęcie szeregu liczbowego oraz szeregu geometrycznego; wprowadza wzór na sumę szeregu geometrycznego oraz rozpatruje przykłady szeregów.
14. Zadania z szeregiem geometrycznym	Zadania z szeregiem geometrycznym; równania, nierówności, zadania o treści geometrycznej.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> rozwiązuje zadania z szeregiem geometrycznym (UP)*. 	Rozwiązuje zadania z różnymi dziedzinami związane z szeregiem geometrycznym.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

GEOMETRIA (zob. zakres podstawowy)

Klasa III

ALGEBRA

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Potęga o wykładniku całkowitym	Przypomnienie wiadomości o potęgach o wykładniku całkowitym; definicja potęgi o wykładniku naturalnym i całkowitym, działania na potęgach.	Właściwości: <ul style="list-style-type: none">omawia pojęcie potęgi liczby rzeczywistej o wykładniku całkowitym (WP). Umiejętności: <ul style="list-style-type: none">wykonuje działania na potęgach o wykładniku całkowitym (UP).	Przypomina wiadomości o potęgach z klasy pierwszej; wykonuje jak najwięcej ćwiczeń w działaniach na potęgach.
2. Potęga o wykładniku wymiernym	Przypomnienie wiadomości o pierwiastkowaniu liczb rzeczywistych i działaniach na pierwiastkach; potęga liczby rzeczywistej o wykładniku wymiernym i działania na tych potęgach.	Umiejętności: <ul style="list-style-type: none">podnosi liczbę rzeczywistą do potęgi wymiernej, korzystając z wiedzy o pierwiastkowaniu liczb rzeczywistych (UP);wykonuje działania na potęgach o wykładniku wymiernym oraz porównuje te potęgi (UP).	Przypomina pojęcie pierwiastka arytmetycznego liczb niewymiernej oraz jego własności, a następnie rozszerza pojęcie potęgi oraz bada własności działań na potęgach o wykładniku wymiernym.
3. Działania na potęgach o wykładniku wymiernym	Działania łączne na potęgach; porównywanie potęg.	Umiejętności: <ul style="list-style-type: none">wykonuje działania na potęgach i je porównuje (UP).	Rozwiązuje jak najwięcej różnorodnych ćwiczeń podnoszących sprawność rachunkową ucznia.
4. Funkcja potęgowa o wykładniku wymiernym	Przykłady funkcji potęgowych o wykładniku: naturalnym, całkowitym, ujemnym, wymiernym postaci $1/n$; ich własności i wykres.	Umiejętności: <ul style="list-style-type: none">sporządza wykresy prostych funkcji potęgowych (UP);odczytuje z wykresów własności funkcji potęgowych (UP).	Podaje proste przykłady funkcji potęgowych, sporządza ich wykresy i je omawia.
5. Informacje o potęgach liczby rzeczywistej o wykładniku niewymiernym	Definicja potęgi liczby rzeczywistej o wykładniku niewymiernym; działania na potęgach o wykładniku niewymiernym; porównywanie potęg o wykładniku niewymiernym.	Właściwości: <ul style="list-style-type: none">wykonuje działania na potęgach o wykładniku niewymiernym (WPP). Umiejętności: <ul style="list-style-type: none">porównuje potęgi o wykładnikach niewymiernych (UPP).	Potęgi liczby rzeczywistej o wykładniku niewymiernym wprowadza informacyjnie – podkreśla, że własności działań na potęgach o wykładnikach niewymiernych są takie jak na potęgach o wykładnikach wymiernych; wprowadzając po-

			<p>tegę o wykładniku niewymiernym, posługuje się pojęciem granicy ciągu albo rozwinięciami dziesiętnymi liczb rzeczywistych i ich przybliżeniami.</p>
6. Funkcja potęgowa i jej własności	<p>Przykłady funkcji potęgowych o wykładniku wymiernym i niewymiernym; dziedziną funkcji potęgowej; wykresy funkcji potęgowych o wykładniku wymiernym i ich własności.</p>	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – sporządza wykresy funkcji potęgowych o wykładniku naturalnym, całkowitym, ujemnym oraz wymiernym postaci $1/n$, gdzie n należy do \mathbb{N} (UP); – odczytuje własności funkcji potęgowych z ich wykresów (UP). 	<p>Definiuje funkcję potęgową o dowolnym wykładniku rzeczywistym; określa jej dziedzinę (w zależności od tego, jaką liczbą jest wykładnik); podaje proste przykłady funkcji potęgowych, sporządza ich wykresy i je omawia.</p>
7. Równania i nierówności potęgowe	<p>Określanie równania potęgowego i nierówności potęgowej; proste przykłady takich równań i nierówności.</p>	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozwiązuje proste równania potęgowe i proste nierówności potęgowe (UP). 	<p>Rozwiązuje różne przykłady prostych równań potęgowych i nierówności potęgowych; stosuje zarówno przekształcenia równoważne, jak również przedstawienia.</p>
8. Funkcja wykładnicza, jej własności i wykres	<p>Definicja funkcji wykładniczej, jej dziedziną, wykres i własności.</p>	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – sporządza wykresy funkcji wykładniczych (UP); – odczytuje z wykresów własności funkcji wykładniczych (miejsca zerowe, różnowartościowość, monotoniczność, zbiór wartości) (UP). 	<p>Sporządza wykresy funkcji wykładniczych i omawia własności tych funkcji.</p>
9. Równania i nierówności wykładnicze	<p>Określenie równania wykładniczego i nierówności wykładniczej; rozwiązywanie równań i nierówności wykładniczych.</p>	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozwiązuje proste równania i nierówności wykładnicze (UP). 	<p>Stosuje własność różnowartościowości funkcji wykładniczej do rozwiązywania równań, a monotoniczność – do rozwiązywania nierówności.</p>
10. Logarytmy i ich własności	<p>Definicja logarytmu; własności logarytmów; logarytmowanie wyrażeń.</p>	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wykonuje podstawowe obliczenia przy użyciu logarytmów (UP). 	<p>Wprowadza pojęcie logarytmu – podkreśla przy tym, że podstawą logarytmu musi być liczbą dodatnią, różną od 1, a liczba logarytmowana dodatnia; dowodzi prostych własności logarytmu i wykonuje ćwiczenia z ich zastosowaniem.</p>

11. Funkcja logarytmiczna	Definicja funkcji logarytmicznej; dziedzi- na, zbiór wartości, wykres, różnowarto- ściowość i monotoniczność funkcji lo- garytmicznej.	Umiejętności: – sporządza wykresy funkcji logarytmicz- nych (UP); – odczytuje z wykresów własności funkcji lo- garytmicznych (UP).	Definiuje funkcję logarytmiczną i bada jej własności; sporządza wykresy funkcji logarytmicznych.
12. Proste równania i nierówności logarytmiczne	Określenie równania logarytmicznego oraz nierówności logarytmicznej; roz- wiązywanie równań i nierówności loga- rytmicznych.	Umiejętności: – rozwiązuje proste równania i nierówności logarytmiczne (UP).	Określa równanie logarytmiczne i nierów- ność logarytmiczną; rozwiązuje równa- nia, korzystając z równowartościowości funkcji logarytmicznej, i nierówności, ko- rzystając z monotoniczności funkcji loga- rytmicznej.

ELEMENTY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEN:	Procedury osiągnięcia celów NAUCZYCIEL:
1. Granica funkcji	Granica funkcji w punkcie – właściwa i niewłaściwa; granica funkcji w nieskoń- czoności – właściwa i niewłaściwa.	Wiedomości: – omawia pojęcie granicy funkcji w punkcie i w nieskończoności (WP). Umiejętności: – interpretuje granicę geometrycznie oraz ilu- struje na przykładach (UP).	Definiuje sąsiedztwo punktu, granicę funkcji w punkcie i w nieskończoności – ilustruje te pojęcia geometrycznie oraz na przykładach funkcji.
2. Działania arytmetyczne na gra- nicach funkcji	Twierdzenie o działaniach arytmetycz- nych na granicach funkcji i jego zasto- sowanie.	Umiejętności: – stosuje twierdzenie do wyznaczania granic (UP).	Formuluje twierdzenie o działaniach arytmetycznych na granicach właści- wych funkcji (odwołując się do analo- gicznego twierdzenia z teorii ciągów zbieżnych) i stosuje je do wyznaczania granic funkcji.
3. Obliczanie granic	Wyznaczanie granic funkcji: wielomia- nowych, wymiernych oraz funkcji, w któ- rych wzorach występują pierwiastki.	Umiejętności: – oblicza granice prostych funkcji elemen- tarnych (UP).	Rozpatruje różne przykłady funkcji ele- mentarnych i wyznacza ich granice; w przekształceniach wzorów funkcji sto- suje wzory skróconego mnożenia.

4. Ciągłość funkcji w punkcie i w przedziale	Definicja ciągłości funkcji w punkcie; ciągłość funkcji w przedziale; badanie ciągłości funkcji (proste przykłady).	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wyjaśnia pojęcie ciągłości funkcji (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – bada ciągłość funkcji, postępując się jej wzorem lub wykresem (UP). 	Wprowadza pojęcie ciągłości funkcji w punkcie i w przedziale; bada ciągłość funkcji określonych wzorem (w tym również wzorem „klamrowym”); wyznacza punkty nieciągłości funkcji (również postępując się wykresem funkcji).
5. Działania arytmetyczne na funkcjach ciągłych	Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na funkcjach ciągłych; ciągłość funkcji wielomianowej oraz funkcji wymiernej.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – stosuje twierdzenie do zbadania ciągłości funkcji wielomianowej i funkcji wymiernej (UP). 	Nawiązuje do twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji; formułuje twierdzenie o działaniach na funkcjach ciągłych oraz stosuje je do badania ciągłości funkcji.
6. Własności funkcji ciągłych	Twierdzenia o lokalnym zachowywaniu znaku funkcji ciągłej; własność Darboux funkcji ciągłej oraz wnioski z twierdzenia Darboux.	<p>Wiedomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – omawia podstawowe własności funkcji ciągłych (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – stosuje poznane twierdzenia w zadaniach dotyczących funkcji ciągłych (UP). 	Formułuje twierdzenia o funkcjach ciągłych oraz interpretuje je na wykresach funkcji, a następnie stosuje je w zadaniach.
7. Pochodna funkcji	Definicja ilorazu różnicowego funkcji i pochodnej funkcji w punkcie; interpretacje geometryczne tych pojęć; różniczkowalność funkcji w przedziale; różniczkowalność a ciągłość funkcji w punkcie; interpretacja fizyczna pochodnej.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – oblicza iloraz różnicowy funkcji w punkcie (UP); – oblicza pochodną funkcji w punkcie (UP); – zapisuje równanie stycznej do krzywej w punkcie (UP); – bada różniczkowalność funkcji w punkcie i w przedziale (UPP). 	Wprowadza podstawowe pojęcia: ilorazu różnicowego, pochodnej oraz podaje interpretacje geometryczne tych pojęć; pokazuje interpretacje fizyczne pochodnej; zwraca także uwagę na związek istnienia pochodnej funkcji z ciągłością; wykonuje wiele ćwiczeń utrwalających te pojęcia.
8. Działania arytmetyczne na pochodnych	Twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych; pochodna funkcji stałej, potęgowej o wykładniku całkowitym i wymiernym.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wyjaśnia wprowadzone i wykazane twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych (UP); – omawia kilka podstawowych wzorów na wyznaczenie pochodnych (UP). 	Formułuje twierdzenie o działaniach arytmetycznych na pochodnych; dowodzi twierdzenia, odwołując się do definicji pochodnej i twierdzeń o działaniach arytmetycznych na granicach funkcji; wprowadza z definicji pochodnej wzory na pochodną funkcji stałej i funkcji potęgowej.

9. Obliczanie pochodnych wielomianów i funkcji wymiernych	Wyznaczanie pochodnych funkcji wielomianowych i funkcji wymiernych.	Umiejętności: – wyznacza pochodne funkcji wielomianowych i funkcji wymiernych (UP).	Wykonuje jak najwięcej ćwiczeń w zakresie wyznaczania pochodnych funkcji.
10. Monotoniczność funkcji różniczkowalnych	Definicja funkcji monotonicznej; twierdzenie o monotoniczności funkcji różniczkowalnych.	Umiejętności: – wyznacza przedziały monotoniczności funkcji różniczkowalnych (UP); – dowodzi prostych nierówności z zastosowaniem poznanego twierdzenia (UP).	Formuluje twierdzenia o monotoniczności funkcji różniczkowalnych; pokazuje je graficznie; dowodzi twierdzenia i stosuje do rozwiązywania zadań.
11. Ekstrema funkcji różniczkowalnych	Pojęcie ekstremum lokalnego; warunek konieczny na istnienie ekstremum lokalnego; warunek wystarczający na istnienie ekstremum; wyznaczanie ekstremów funkcji różniczkowalnych (proste przykłady)	Wiadomości: – rozpoznaje na wykresie funkcji jej ekstrema lokalne (WP). Umiejętności: – wyznacza punkty, w których ekstremum lokalne może wystąpić (UP); – wyznacza ekstrema funkcji różniczkowalnych (UP); – wyznacza wartość największą i najmniejszą funkcji różniczkowalnych w przedziale (UP).	Wprowadza pojęcie ekstremum (wskazane jest posługiwanie się tutaj wykresem funkcji mającej ekstrema); formuluje warunki konieczny i dostateczny na istnienie ekstremum; wyznacza ekstrema lokalne funkcji różniczkowalnych oraz wartości najmniejszą i największą (o ile istnieją) funkcji w przedziale.
12. Zadania prowadzące do wyznaczenia ekstremum funkcji różniczkowalnych	Zadania na ekstremum funkcji różniczkowalnych o treści: praktycznej (z życia codziennego), geometrycznej (z planimetrii i ze stereometrii).	Umiejętności: – rozwiązuje proste zadania o charakterze praktycznym oraz zadania z geometrii na wyznaczanie ekstremów funkcji różniczkowalnych (UP).	Rozwiązuje jak najwięcej zadań na ekstremum – warto przy tej okazji omówić raz jeszcze pojęcie ekstremum absolutnego (wartości największej lub najmniejszej) i podkreślić, kiedy ekstremum lokalne staje się ekstremum absolutnym.

GEOMETRIA ANALITYCZNA (zob. zakres podstawowy)

STEREOMETRIA

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZENI:	Procedury osiągania celów NAUCZYCIEL:
1. Pojęcie graniastosłupa, rodzaje graniastosłupów	Definicje graniastosłupa i klasyfikacja graniastosłupów; pojęcie wysokości graniastosłupa; wzory na objętość i pole powierzchni graniastosłupa.	Wiadomości: – definiuje graniastosłup (WP).	Kształtuje wyobraźnię przestrzenną; rozważa różne rodzaje graniastosłupów; omawia wysokość graniastosłupa;

			<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznaje graniastopy proste, prawidłowe (UP); – oblicza objętość i pole powierzchni całkowitej graniastopy (UP). 	<p>oblicza objętość i pole powierzchni całkowitej na podstawie podanych wzorów.</p>
2. Pojęcie ostrosłupa, rodzaje ostrosłupów	Definicja ostrosłupa i klasyfikacja ostrosłupów; wysokość ostrosłupa; wzory na objętość i pole powierzchni ostrosłupa; ostrosłup ścięty oraz wzór na jego objętość.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – definiuje ostrosłup, ostrosłup prawidłowy (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – oblicza objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa (UP); – oblicza objętość ostrosłupa ściętego (UP). 	<p>Rozważa różne rodzaje ostrosłupów, rysuje ich modele; omawia wysokość ostrosłupa, badając, gdzie znajduje się jego spodek; wprowadza wzór na objętość ostrosłupa ściętego, korzystając ze wzoru na objętość ostrosłupa.</p>	
3. Wielościany foremne	Opis czworoscianu, sześciianu, ośmiościanu, dwunastocianu i dwudziestocianu; siatki wielościanów foremnych.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznaje wielościany foremne (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rysuje siatkę wielościanu foremnego (UP); – rozpoznaje wielościan foremny, mając jego siatkę (UP). 	<p>Omawia własności wielościanów foremnych (nawiązując do charakterystyki Eulera, warto spróbować wykaazać istnienie tylko pięciu wielościanów foremnych); rysuje siatki wielościanów.</p>	
4. Wzajemne położenie krawędzi i ścian graniastostupów i ostrosłupów	Kąty nachylenia: ściany bocznej, krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy; kąt między wysokościami ścian bocznych, krawędzie skośne czworoscianu, przekątne skośne.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – wskazuje: kąty nachylenia liniowych elementów graniastostupów i ostrosłupów do płaszczyzny podstawy; kąty między tymi elementami (UP); kąty dwuścienne ściany bocznej i podstawy oraz ścian bocznych (UPP). 	<p>Bada na modelach tych brył i na ich rysunkach położenie krawędzi i ścian graniastostupów oraz ostrosłupów.</p>	
5. Przekroje płaskie graniastostupów i ostrosłupów	Zadania z przekrojami płaskimi graniastostupów i ostrosłupów.	<p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozwiązuje zadania z przekrojami płaskimi graniastostupów i ostrosłupów (UPP). 	<p>Rozwiązuje zadania, których motywem jest przekrój płaski bryły, stosuje wiadomości z planimetrii i trygonometrię.</p>	
6. Bryły obrotowe	Pojęcie bryły obrotowej, przykłady takich brył: walec, stożek, kula, wzory na ich objętość i pole powierzchni całkowitej.	<p>Wiadomości:</p> <ul style="list-style-type: none"> – rozpoznaje bryły obrotowe (WP). <p>Umiejętności:</p> <ul style="list-style-type: none"> – oblicza objętość i pole powierzchni całkowitej brył obrotowych (UP). 	<p>Dąży do tego, aby przy obliczaniu objętości i pól powierzchni całkowitej brył uczniowie stosowali funkcje trygonometryczne i elementy geometrii płaszczyznej.</p>	

7. Siatki brył	Siatki graniastoslupów, ostrosłupów, brył obrotowych.	Umiejętności: – wykonuje siatki brył (UP); – rozpoznaje bryłę na podstawie jej siatki (UP).	Wykonuje ćwiczenia, które powinny doprowadzić do tego, aby uczniowie potrafili narysować siatkę odpowiedniego modelu bryły, na podstawie przedstawionej siatki umieli rozpoznać bryłę bądź stwierdzić, że nie odpowiada danej z poznanych brył.
8. Zadania z bryłami z zastosowaniem trygonometrii	Rozwiązywanie zadań na: obliczanie objętości i pól powierzchni całkowitych wybranych brył; wyznaczanie miar kątów nachylenia, kątów dwusiecznych itp.; dowodzenie prostych zależności między elementami brył.	Umiejętności: – rozwiązuje różne proste zadania ze stereometrii, posługując się wiedzą z geometrii płaskiej i trygonometrią (UP)*.	W rozwiązywaniu zadań ze stereometrii sięga do przykładów z życia codziennego, na przykład kubatury budynków, pojemności basenów itp.

RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Hasło	Realizowane treści	Cele kształcenia i osiągnięcia ucznia UCZEŃ:	Procedury osiągnięcia celów NAUCZYZIELI:
1. Pojęcie silni, permutacji zbioru	Definicja silni, permutacji zbioru, liczba permutacji zbioru.	Umiejętności: – oblicza i przekształca wyrażenia z silnią (UP); – wyznacza permutacje zbiorów i ich liczby (UP).	Wykonuje jak najwięcej ćwiczeń.
2. Symbol Newtona	Określenie symbolu Newtona oraz dowodzenie jego podstawowych własności.	Umiejętności: – postępuje się symbolem Newtona (UP).	Wprowadza symbol Newtona i wyprowadza jego podstawowe własności oraz wykonuje ćwiczenia rachunkowe.
3. Kombinacje i wariacje	Określenie kombinacji zbioru oraz wariacji z powtórzeniami i bez powtórzeń.	Wiedomości: – odróżnia wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń elementów danego zbioru (WP); – odróżnia kombinacje od wariacji (WP). Umiejętności: – wyznacza kombinacje zbioru skończonego (UP); – wyznacza liczbę kombinacji i wariacji (UP).	Stara się, aby uczeń zrozumiał pojęcia, umiał je odróżniać oraz wyznaczać; warto ustalić zależność między liczbą kombinacji danego zbioru a liczbą wariacji bez powtórzeń tego zbioru.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

4. Proste zadania kombinatoryczne	Rozwiązywanie zadań związanych z pojęciami kombinatorycznymi.	Umiejętności: – rozwiązuje zadania kombinatoryczne (UP)*.	Sięga między innymi do zadań z różnych dziedzin, na przykład związanych z grami liczbowymi, talią kart do gry, numeracją tablic rejestracyjnych itp.
5. Zdarzenie elementarne, zdarzenie i działania na zdarzeniach	Język rachunku prawdopodobieństwa, pojęcie zdarzenia i działania na zdarzeniach: koniunkcja, alternatywa, różnica, zdarzenie przeciwne do danego.	Wiedomości: – wyjaśnia język rachunku prawdopodobieństwa oraz kojarzy pojęcie zdarzenia i działania na nich z pojęciami nauki o zbiorach (WP). Umiejętności: – podaje przykłady zdarzeń (UP).	Stara się nawiązywać (w realizacji zagadnień) do wiadomości z teorii zbiorów; rozważa jak najwięcej przykładów.
6. Pojęcie prawdopodobieństwa i jego własności	Pojęcie częstości zdarzenia i jej związek z prawdopodobieństwem; definicja prawdopodobieństwa i jego własności.	Wiedomości: – definiuje prawdopodobieństwo (WP). Umiejętności: – wykazuje proste jego własności (UP); – poznaje funkcję, której argumentami są zbiory (zdarzenia) (UP).	Bada własności pojęcia częstości; definiuje (za Kolmogorowem) prawdopodobieństwo i dowodzi jego podstawowych własności; rozwiązuje proste zadania związane z nowym pojęciem.
7. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa	Twierdzenie o rozkładzie prawdopodobieństwa; klasyczna definicja prawdopodobieństwa; obliczanie prawdopodobieństw w skończonych przestrzeniach probabilistycznych.	Umiejętności: – rozwiązuje najprostsze zadania (z rzutem kostką, dwiema kostkami, monetą, dwiema monetami, kostką i monetą) z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (UP).	Formuluje twierdzenie o rozkładzie prawdopodobieństwa, a następnie rozważa przypadek jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych, otrzymując klasyczną definicję prawdopodobieństwa.
8. Zadania z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa	Permutacje, kombinacje, wariacje z powtórzeniami i bez powtórzeń w zadaniach z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa.	Umiejętności: – rozwiązuje proste zadania z rachunku prawdopodobieństwa z zastosowaniem elementów kombinatoryki i klasycznej definicji prawdopodobieństwa (UP).	W rozwiązywanych zadaniach zwraca uwagę na: opis przestrzeni zdarzeń elementarnych (możliwych wyników doświadczenia losowego), wyznaczanie ich liczby, opis interesującego nas zdarzenia, wyznaczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających temu zdarzeniu.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP

9. Prawdopodobieństwo warunkowe	Definicja prawdopodobieństwa warunkowego, dowód poprawności tej definicji; zadania na prawdopodobieństwo warunkowe.	Umiejętności: – stosuje poznane pojęcie do rozwiązywania zadań z rachunku prawdopodobieństwa (UP).	Rozwiązuje zadania nie tylko z zastosowaniem tej definicji – wiele z nich można rozwiązać z zastosowaniem definicji klasycznej, konstruując inną niż naturalna przestrzeń zdarzeń elementarnych.
10. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite	Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym i zadania z zastosowaniem tego twierdzenia.	Umiejętności: – stosuje twierdzenie do rozwiązywania zadań (UP)*.	Po sformułowaniu i udowodnieniu tego twierdzenia przystępuje do rozwiązywania zadań (zwraca uwagę na to, że należy zawsze najpierw sprawdzić, czy w danym zadaniu spełnione są założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym).
11. Niezależność zdarzeń	Niezależność pary zdarzeń oraz niezależność n zdarzeń ($n \geq 3$).	Umiejętności: – rozstrzyga, czy zdarzenia są niezależne czy zależne (UP).	Wprowadza pojęcie niezależności zdarzeń parami i zespolowo oraz ustala związek między tymi niezależnościami, rozwiązuje jak najwięcej zadań.
12. Schemat Bernoulliego	Określanie schematu Bernoulliego; liczba sukcesów w schemacie Bernoulliego i jej prawdopodobieństwo oraz najbardziej prawdopodobna liczba sukcesów.	Wiedomości: – rozpoznaje w zadaniu schemat Bernoulliego (WP). Umiejętności: – wyznacza prawdopodobieństwo interesującej go liczby sukcesów w tym schemacie (UP); – określa najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów w tym schemacie (UPP).	Określa schemat Bernoulliego; podaje wiele przykładów tego schematu; wyznacza prawdopodobieństwo otrzymania k sukcesów w schemacie N prób Bernoulliego oraz najbardziej prawdopodobną liczbę sukcesów; rozwiązuje jak najwięcej zadań ze schematem Bernoulliego.
13. Elementy statystyki opisowej	Średnia arytmetyczna, średnia ważona, mediana, wariacje i odchylenia standardowe.	Umiejętności: – odczytuje dane statystyczne z tabel, diagramów i wykresów (UP); – przedstawia dane empiryczne w postaci tabel, diagramów i wykresów (UP); – przeprowadza analizę ilościową przedstawianych danych (UP); – oblicza średnie danych liczbowych oraz odchylenia od nich (UP).	Interpretuje jakościowo informacje zawarte w tabelach, diagramach i wykresach oraz ustala i formułuje proste zależności między nimi; wykorzystuje te informacje w toku badania typowych sytuacji problemowych.

* różniąc stopień trudności zadań, osiągamy cele z zakresu UPP